Решения заданий муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников Новосибирской области по математике 2023-2024 г.г.
Решение каждой задачи олимпиады оценивается из 7 баллов

9 класс

9.1. Найти все решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + x + 3y = 1, \\ x^2 - 2y^2 + 3x - 6y = 8. \end{cases}$$

Ответ. $(1,-1),(1,-2)$.

Решение. Умножим первое уравнение системы на 2 и сложим со вторым, получим $5x^2 + 5x = 10$, что равносильно квадратному уравнению $x^2 + x - 2 = 0$, корни которого равны $x = 1$ и $x = -2$. Подставляем в первое уравнение $x = 1$, получаем квадратное уравнение $y^2 + 3y + 2 = 0$ относительно y, откуда $y = -1$или $y = -2$. Получили два решения $(1,-1),(1,-2)$. При подстановке в первое уравнение второго значения $x = -2$ получается квадратное уравнение $y^2 + 3y + 5 = 0$, не имеющее решений, поэтому данный случай к ответу не приводит.

Замечание. Вместо сложения уравнений можно сделать по-другому, выразив выражение $y^2 + 3y$ через x двумя способами из первого и второго уравнений: $y^2 + 3y = -2x^2 - x + 1 = \dfrac{x^2 + 3x - 8}{2}$, откуда также следует уравнение $x^2 + x - 2 = 0$ для x.

Критерии проверки. (●) Угадан ответ с проверкой: по 1 баллу за каждый ответ.**(●)** Идея сложения уравнений с исключением переменного y: 3 балла. **(●)** Решение полученного уравнения и получение значений $x = 1$ и $x = -2$: 1 балл. **(●)** Нахождение соответствующих значений y: 1 балл. . **(●)** Отбрасывание значения $x = -2$: 2 балла.

9.2. а) Разбить все натуральные числа от 1 до 12 включительно на 6 пар, суммы чисел в каждой из которых являются шестью различным простыми числами. б) Можно ли разбить все натуральные числа от 1 до 14 включительно на 7 пар, суммы чисел в каждой из которых являются семью различным простыми числами?

Ответ. а) Есть два возможных варианта, либо 2+3=5, 1+6=7, 4+7=11, 5+8=13, 9+10=19, 11+12=23, либо 1+4=5, 2+5=7, 3+8=11, 6+7=13, 9+10=19, 11+12=23.
б) нет.

Решение. а) Если все натуральные числа от 1 до 12 включительно разбиты на 6 пар, суммы чисел в которых являются шестью различным простыми числами, то каждая из этих сумм может быть равна одному из восьми простых чисел 3,5,7,11,13,17,19,23 из интервала от 1+2=3 до 11+12=23. Общая сумма всех этих 8 простых чисел равна 98, в то время как сумма всех чисел от 1 до 12 равна 78. Следовательно, среди шести сумм в парах отсутствуют 2 из этих простых чисел с суммой 20, то есть либо 3 и 17, либо 7 и 13. Во втором случае среди сумм пар одновременно были бы 1+2=3 и 2+3=5, что невозможно, значит реализуется первый вариант, когда эти шесть сумм равны простым числам 5,7,11,13,19,23. Для них несложно подобрать ровно два возможных варианта ответа:
а) 2+3=5, 1+6=7, 4+7=11, 5+8=13, 9+10=19, 11+12=23.
б) 1+4=5, 2+5=7, 3+8=11, 6+7=13, 9+10=19, 11+12=23.

б) Предположим противное, что все натуральные числа от 1 до 14 включительно можно разбить на 7 пар, суммы чисел в которых являются семью различным простыми числами. Каждая из этих сумм может быть равна одному из восьми простых чисел 3,5,7,11,13,17,19,23 из интервала от 1+2=3 до 13+14=27. Следовательно, сумма чисел в этих семи парах не превосходит суммы семи максимальных из этих простых чисел

5+7+11+13+17+19+23=95. С другой стороны, эта сумма равна сумме всех натуральных числа от 1 до 14 включительно, то есть 105 – противоречие. Следовательно, числа от 1 до 14 так разбить на пары нельзя.

Критерии проверки. (●) Пример в пункте а), или оба: 3 балла. **(●)** Доказательство невозможности в пункте б): 4 балла.

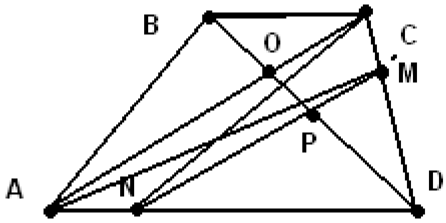
9.3. По кругу стоят 50 человек попарно различного роста. Среди них ровно 44 ниже хотя бы одного из своих соседей справа или слева. Сколько из стоящих по кругу выше ровно одного из своих соседей справа или слева?

Ответ. 38 человек.

Решение. Рассмотрим последовательность ростов этих людей по часовой стрелке. Она состоит из монотонно возрастающих и монотонно убывающих последовательностей, чередующихся по кругу. Следовательно, количество возрастающих и убывающих последовательностей одинаково. Люди, стоящие в точках перехода от возрастающей последовательности к убывающей, и только они, выше обоих своих соседей, а люди, стоящие в точках перехода от убывающей последовательности к возрастающей, и только они, ниже обоих своих соседей. Заметим, что число тех и других одинаково, так как возрастающие и убывающие последовательности чередуются по кругу. Следовательно, тех, кто выше обоих своих соседей, будет 50-44=6 человек, столько же будет и тех, кто ниже обоих соседей. Тогда тех, кто выше хотя бы одного из своих соседей, будет 50-6=44, а тех, кто выше ровно одного из своих соседей будет 44-6=38 человек.

Критерии проверки. (●) Замечено, что последовательность ростов этих людей по часовой стрелке состоит из одинакового количества чередующихся монотонно возрастающих и монотонно убывающих последовательностей: 2 балла. **(●)** Замечено, что число тех, кто выше обоих своих соседей и тех, кто ниже обоих своих соседей, одинаково: ещё 1 балл. **(●)** Показано, что тех, кто выше обоих своих соседей 50-44=6 человека: 1 балл. **(●)** Показано, что тех, кто выше хотя бы одного из своих соседей 50-6=44 человека: 1 балл. **(●)** Показано, что тех, кто выше ровно одного из своих соседей будет 44-6=38 человек: 2 балла.

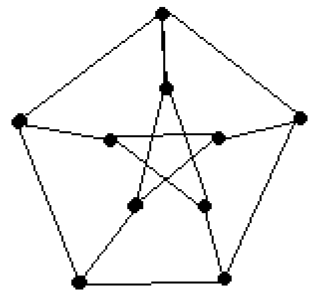
9.4. В трапеции ABCD основание AD больше, чем основание BC. Точки M и N выбраны на сторонах CD and AD соответственно так, что каждый из отрезков AM и CN делит трапецию на две части равной площади. Докажите, что отрезок MN пересекает диагональ BD в её середине.



Доказательство. Обозначим длины оснований AD и BC за $a > b$ соответственно, а площадь трапеции за *S*. Обозначим за P точку пересечения отрезка MN с диагональю BD. Заметим, что из равенства площадей треугольников ANC и AMC следует параллельность MN и диагонали AC. Тогда $S_{ABC} = \dfrac{b}{a+b}S, S_{ACD} = \dfrac{a}{a+b}S,$ а площадь треугольника $S_{ANC} = S_{AMC} = \dfrac{S}{2} - \dfrac{b}{a+b}S = \dfrac{a-b}{2(a+b)}S$. Найдём теперь отношение длин отрезков *AN* и *AD* $\dfrac{AN}{AD} = \dfrac{CM}{CD} = \dfrac{OP}{OD} = S_{ANC} : S_{ACD} = \dfrac{a-b}{2(a+b)}S : \dfrac{a}{a+b}S = \dfrac{a-b}{2a}$, соответственно,

$\frac{DN}{AD}=\frac{MD}{CD}=\frac{PD}{OD}=1-S_{ANC}:S_{ACD}=\frac{a+b}{2a}$. Тогда $\frac{PD}{BD}=\frac{a+b}{2a}OD:\frac{a+b}{a}OD=\frac{1}{2}$, то есть точка P - середина диагонали BD, что и требовалось доказать.
Критерии проверки. **(●)** Найдено отношение площади треугольника ANC и площади трапеции: 2 балла. **(●)** Найдено отношение длин отрезков AN и AD: ещё 2 балла. **(●)** Найдено отношение длин отрезков DN и AD: ещё 1 балл. **(●)** Найдено отношение длин отрезков PD и BD: 2 баллf

9.5. На вечеринку приглашены несколько человек. Каждый приглашённый знаком не более, чем с тремя другими приглашёнными, и если некоторые двое из приглашённых не знакомы, то они обязательно имеют хотя бы одного общего знакомого среди других приглашённых. Каково максимально возможное количество приглашённых на вечеринку?
Ответ. 10.
Решение. Докажем, что приглашённых не могло быть больше 10 человек. Обозначим количество приглашённых на вечеринку за n, рассмотрим среди них человека A, знакомого с максимальным числом $d \le 3$ других приглашённых $X_1,...,X_d$. По условию, любой приглашённый Y, не знакомый с A, имеет общего знакомого с A, то есть знает кого-то из множества $X_1,...,X_d$. В сумме у всех приглашённых $X_1,...,X_d$ не больше $2d \le 6$ знакомых, кроме A. Следовательно, всего приглашённых на вечеринку не больше, чем 1+3+6=10 человек.



Пример для 10 приглашённых человек приведён на рисунке. Вершины графа соответствуют приглашённым, соединяющие их рёбра – знакомствам между ними. Этот граф имеет собственное имя – это граф Петерсена.
Критерии проверки. **(●)** Доказано, что приглашённых не могло быть больше 10 человек: 5 баллов. **(●)** Пример для 10 приглашённых: 2 балла.